UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

CONSEJO SUPERIOR
DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA Y GEODESIA

(Centro Mixto C.S.I.C. - U.C.M.). MADRID

Publicación núm. 197

DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS EN REDES GPS VECTORIALES

por

J. Otero

M A D R I D
2002

Detección de errores groseros en redes GPS vectoriales

J. Otero*
Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC)
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

En memoria de Pepita Jiménez Galera (1919-2002)

Resumen

El modelo lineal en el ajuste de una red GPS vectorial es un modelo multivariante donde las observaciones son vectores aleatorios de componentes correladas. Apilando las observaciones de manera conveniente (por bases), este modelo se transforma en un modelo lineal univariante con matriz de varianzas-covarianzas diagonal por bloques en el caso más sencillo de suponer que las bases están incorreladas. Después de revisar el procedimiento para detectar errores groseros en modelos lineales univariantes, se propone en este artículo su generalización al modelo multivariante de ajuste de redes GPS vectoriales. Esto se hace para el caso más general: suponiendo que todas las bases han sido observadas y que la red no tiene puntos fijos.

1 Modelo lineal en el ajuste de una red GPS vectorial

Hay en Geodesia un denominador común en muchos modelos matemáticos de ajuste: las observaciones son medidas relativas de una manera directa o indirecta. Esto ocurre en redes de nivelación donde las observaciones son desniveles o diferencias de altitudes, en redes trilateradas en las que se observan distancias no dependiendo las observaciones del sistema de referencia, en redes gravimétricas, en la compensación de estación cuando se miden ángulos (como diferencias de direcciones). Otros ejemplos, especialmente significativos, son las redes VLBI y las redes GPS. En el primer caso, el retardo de la señal de una radiofuente entre dos estaciones es una combinación lineal de las diferencias de coordenadas entre ambas estaciones.

*Parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Proyecto REN2000-0766/CLI

En observaciones GPS, usando medidas de fase en diferencias simples, dobles o triples, el procesado de estas observaciones puede proporcionar las componentes del vector definido por las dos estaciones receptoras. Las componentes de este vector son las diferencias de coordenadas cartesianas en el sistema geodésico WGS84 o ITRF92, disponiendo además de la matriz de varianzas-covarianzas de este vector aleatorio (ver [7], en especial las secciones §8.2, §8.3.4 y el Capítulo 11).

La relaciones funcionales en una red vectorial GPS son $(j > i)$

$$\begin{aligned} \Delta X_{ij} &= X_j - X_i \\ \Delta Y_{ij} &= Y_j - Y_i \\ \Delta Z_{ij} &= Z_j - Z_i, \end{aligned}$$

donde ΔX_{ij} es el valor verdadero de la componente X del vector $\overrightarrow{P_i P_j}$, cuyo valor observado denotaremos por Δx_{ij}, etc.

Suponiendo para mayor generalidad que las líneas base se han observado en todas las combinaciones posibles y que las incógnitas son las coordenadas cartesianas de todos los puntos, consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_{n-2} \\ \vdots \\ A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{1}$$

con

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} -1_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n},$$

y para $i = 2, \ldots, n-1$

$$A_{n-i} = \begin{pmatrix} 0 & -1_{n-i} & I_{n-i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-i)\times n}.$$

Aquí n es el número de puntos y $m = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1)/2$ el número de bases observadas; I_k $(k > 0)$ es la matriz identidad de orden k, 1_k $(k > 0)$ el vector de $\mathbb{R}^k$ cuyos elementos son todos iguales a 1, y la matriz nula 0 que aparece en A_{n-i} es $(n-i) \times (i-1)$. Esta matriz A es una matriz de incidencia de rango igual a $n-1$ y es la matriz de configuración o de diseño en redes de nivelación (ver [8]).

Definimos la matriz l de observaciones y la matriz X de incógnitas de la siguiente manera

$$l = \begin{pmatrix} \Delta x_{12} & \Delta y_{12} & \Delta z_{12} \\ \Delta x_{13} & \Delta y_{13} & \Delta z_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x_{(n-1)n} & \Delta y_{(n-1)n} & \Delta z_{(n-1)n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l'_{(1)} \\ l'_{(2)} \\ \vdots \\ l'_{(m)} \end{pmatrix}$$

y

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{(1)} \\ x'_{(2)} \\ \vdots \\ x'_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Con ayuda de estas matrices, el modelo lineal en el ajuste o compensación de una red GPS es el siguiente modelo multivariante

$$l = AX + \varepsilon\,, \quad \mathrm{E}(\varepsilon) = 0\,, \quad \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{(i)}, \varepsilon_{(j)}\right) = \Sigma_{ij}\,. \tag{2}$$

Para convertir el modelo (2) en un modelo univariante, apilamos las observaciones por filas (por bases) usando el operador Vec que actúa de la manera siguiente: si $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ entonces

$$\mathrm{Vec}\,(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{I\!R}^{mn}.$$

Recordando que el producto de Kronecker de dos matrices A y B es $[A_{m\times n} \otimes B_{p\times q}] = (a_{ij}B) \in \mathrm{I\!R}^{mp\times nq}$, la siguiente propiedad (ver [5])

$$\mathrm{Vec}\,(AXB) = [B' \otimes A]\mathrm{Vec}\,(X)$$

nos permite escribir

$$\mathrm{Vec}\,(l') = [A \otimes I_3]\mathrm{Vec}\,(X') + \mathrm{Vec}\,(\varepsilon)\,.$$

Introducimos ahora los vectores

$$l = \mathrm{Vec}\,(l') = \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix},\ x = \mathrm{Vec}\,(X') = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{pmatrix},\ \varepsilon = \mathrm{Vec}\,(\varepsilon') = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{(m)} \end{pmatrix}.$$

El modelo lineal de una red GPS es por tanto

$$\boxed{l = A^*x + \varepsilon\,, \quad \mathrm{E}(\varepsilon) = 0\,, \quad \mathrm{Cov}\,(\varepsilon) = (\Sigma_{ij})} \tag{3}$$

con $A^* = [A \otimes I_3] \in \mathrm{I\!R}^{3m\times 3n}$ y $\Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{(i)}, \varepsilon_{(j)}\right) \in \mathrm{I\!R}^{3\times 3}$. El rango de A^* es $3n - 3$ y su deficiencia de rango pone de manifiesto que las coordenadas de los puntos quedan determinadas salvo una traslación en $\mathrm{I\!R}^3$.

2 Hipótesis lineal general

Por su esencial conexión con el problema de detectar errores groseros en las observaciones, dedicamos esta sección al contraste de hipótesis sobre funciones paramétricas en modelos lineales

$$l = Ax + \varepsilon\,, \quad \varepsilon \sim N(0\,, V = \sigma^2 P^{-1}). \tag{4}$$

Los resultados que presentamos sin demostración pueden verse desarrollados, por ejemplo, en [6].

La hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 : \lambda'_{(1)}x &= d_1, \\ \lambda'_{(2)}x &= d_2, \\ &\dots \\ \lambda'_{(p)}x &= d_p \end{aligned}$$

se llama hipótesis lineal general acerca de los parámetros x del modelo. H_0 también puede escribirse como

$H_0 : \Lambda x = d,$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda'_{(1)} \\ \vdots \\ \lambda'_{(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

y $d = (d_1, \dots, d_p)'$. Supondremos, sin perdida de generalidad, que el rango de Λ es p.

La hipótesis H_0 es *contrastable* si Λx es estimable, es decir, si y sólo si, $\Lambda = \Lambda H$, con $H = A^- A$ y donde A^- es una inversa generalizada de A. Según el teorema de Gauss-Markov, si Λx es estimable, el mejor estimador lineal insesgado (BLUE, en inglés) de Λx es $\Lambda\widehat{x}$ con $\widehat{x}$ cualquier estimación mínimos cuadrados de x, es decir, cualquier solución del sistema de ecuaciones normales $N\widehat{x} = A'Pl$, $N = A'PA$. Las funciones paramétricas $L = Ax$ son estimables, y $\widehat{L} = A\widehat{x}$ reciben el nombre de *observaciones ajustadas*. En una red GPS son de relevante importancia las funciones paramétricas estimables $\Lambda x = [a'_{(i)} \otimes I_3]x$ (componentes de la base i). También lo son, en redes con un punto fijo, las funciones $\Lambda x = [e'_{(i)} \otimes I_3]x$ (coordenadas del punto i). En ambos casos $p = 3$.

Definimos

$$S := \widehat{\varepsilon}\,' P \widehat{\varepsilon},$$

con $\widehat{\varepsilon} = l - A\widehat{x}$ (*residuales del ajuste*). Recordemos que $\widehat{\sigma}^2 = S/(m-r)$, $r = \mathrm{rg}\,(A)$, es un estimador insesgado en media de σ^2. Nótese que

$$\frac{S}{\sigma^2} = \frac{(m-r)\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \widehat{\varepsilon}\,' V^{-1} \widehat{\varepsilon},$$

que cabe interpretar como un estadístico que mide la calidad o bondad del ajuste (*lack-of-fit statistics for the model*). Si como estamos suponiendo, $\varepsilon \sim N(0\,,\,\sigma^2 P^{-1})$, entonces

1. $$\frac{S}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-r).$$

2. S y el BLUE de cualquier función paramétrica estimable son independientes.

Si $\Lambda \in \mathbb{R}^{p\times n}$ es de rango igual a p y Λx es estimable, la matriz Cov $(\Lambda\widehat{x}) = \sigma^2\,(\Lambda N^-\Lambda')$ es definida positiva (ver [6, Chapter 2, Sect.6]). Para contrastar H_0 usaremos el estadístico

$$\boxed{F := \frac{(\Lambda\widehat{x}-d)'\,(\Lambda N^-\Lambda')^{-1}\,(\Lambda\widehat{x}-d)\,/p}{\widehat{\sigma}^2}.} \tag{5}$$

Según el siguiente resultado acerca de la distribución de formas cuadráticas aleatorias (ver [12]): *si $X \sim N(\mu,V)$, entonces*

$$X^T A X \sim \chi^2\,(\mathrm{rg}\,(A)\;,\,\lambda)$$

si, y sólo si, AV es idempotente, con $\lambda = \mu' A\mu/2$, tenemos que

$$(\Lambda\widehat{x}-d)'\left(\sigma^2\Lambda N^-\Lambda'\right)^{-1}(\Lambda\widehat{x}-d) \sim \chi^2(p,\lambda)$$

con

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(\Lambda x-d)'\left(\sigma^2\Lambda N^-\Lambda'\right)^{-1}(\Lambda x-d)\,. \tag{6}$$

Por la independencia entre $\Lambda\widehat{x}$ y S, la distribución χ^2 de la forma cuadrática

$$(\Lambda\widehat{x}-d)'\left(\sigma^2\Lambda N^-\Lambda'\right)^{-1}(\Lambda\widehat{x}-d)$$

es independiente de la distribución de S. Por otro lado, si X, Y son dos variables aleatorias independientes tales que $X \sim \chi(n_1,\lambda)$ y $Y \sim \chi(n_2,0)$, entonces,

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2,\lambda),$$

denominada F de Snedecor no central con n_1 y n_2 grados de libertad, y parámetro de no centralidad λ. Podemos concluir que

$$F \sim F(p,m-r,\lambda)$$

con λ dado por (6).

Si H_0 es cierta, $\lambda = 0$ y $F \sim F(p,m-r)$. Es de esperar además que, si la hipótesis es cierta, F alcance valores pequeños. Por tanto, rechazamos

H_0 si el valor observado de F es mayor que q donde $q \in \mathbb{R}^+$ es el punto definido por

$$P[F(p, m-r) \leq q] = 1 - \alpha,$$

con $\alpha \sim 0$. El test para contrastar H_0 puede ser por tanto el siguiente,

$$\boxed{\Gamma : \text{ Rechazar } H_0 \text{ si, y sólo si, } F \geq q.}$$

Si F es menor que q no hay evidencia contra H_0.

Nota 2.1 Cuando H_0 hace referencia sólo a una función paramétrica $\lambda' x$ entonces, si H_0 es cierta

$$\frac{\left[(\lambda'\widehat{x} - d)^2 / \lambda' N^- \lambda \right]}{\widehat{\sigma}^2} \sim F(1, m-r),$$

que es lo mismo que decir

$$\frac{\lambda'\widehat{x} - d}{(\widehat{\sigma}^2 \lambda' N^- \lambda)^{1/2}} \sim t(m-r).$$

En efecto, si H_0 es cierta

$$\frac{\lambda'\widehat{x} - d}{(\sigma^2 \lambda' N^- \lambda)^{1/2}} \sim N(0,1)$$

y es independiente de $\dfrac{S}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-r)$. □

El tamaño de este test (es decir, el valor máximo de la probabilidad de rechazar H_0, siendo cierto que $\Lambda x = d$) es α. En efecto, vemos en primer lugar que la función potencia del test Γ, $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto [0,1]$, viene dada por

$$\begin{aligned} \pi(x, \sigma^2) &= P\left[F \geq q \,|\, (x, \sigma^2)\right] \\ &= 1 - P\left[F \leq q \,|\, (x, \sigma^2)\right], \end{aligned}$$

donde $F \sim F(p, m-r, \lambda)$ con $\lambda = \lambda(x, \sigma^2)$ dado por (6). Si $S_H := \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda x = d\}$, nos gustaría idealmente que $\pi = 0$ en $S_H \times \mathbb{R}^+$ y $\pi = 1$ en $(\mathbb{R}^n \backslash S_H) \times \mathbb{R}^+$. Así pues, el tamaño s del test es, teniendo en cuenta como está definido q,

$$s = \sup_{S_H \times \mathbb{R}^+} \pi = 1 - (1 - \alpha) = \alpha.$$

El test Γ es uniformemente el más potente de tamaño α entre los tests insesgados cuya función potencia depende de x y σ^2 por medio de λ (ver, por ejemplo, [4, p.48]).

3 Análisis de residuales en modelos lineales univariantes

Suponemos es esta sección que la matriz A en (4) es de rango completo. Como venimos haciendo, $a'_{(i)}$ denota la fila i-ésima de A. La clave para detectar observaciones groseras o aberrantes está en estudiar los residuales ajustados tipificados (tipificados para poder compararlos):

$$W_i = \frac{\widehat{\varepsilon}_i}{\mathrm{D}(\widehat{\varepsilon}_i)} \sim N(0,1),$$

donde $\widehat{\varepsilon}_i = l_i - \widehat{L}_i$ y $\mathrm{D}(\widehat{\varepsilon}_i)$ es la desviación típica de $\widehat{\varepsilon}_i$. La matriz de varianzas-covarianzas de $\widehat{\varepsilon}$ es (ver [13, Ec. 2.35])

$$\mathrm{Cov}\,(\widehat{\varepsilon}) = \sigma^2 \left(P^{-1} - AN^{-1}A'\right),$$

Por tanto,

$$\mathrm{D}(\widehat{\varepsilon}_i) = \sigma q_i^{1/2},$$

con

$$q_i = p_i^{-1} - a'_{(i)}N^{-1}a_{(i)},$$

habiendo supuesto que la matriz de pesos de las observaciones es diagonal.

El procedimiento conocido en Geodesia como ***data snooping*** **de Baarda** (*to snoop*: curiosear, fisgonear) consiste, en primer lugar, en localizar la observación l_j que tenga la propiedad $|W_j| = \max_i |W_i|$. Esta observación es la que puede estar corrompida o tener un error grosero. Si se conoce σ^2, decidimos que hay un error grosero en la observación l_j si $|W_j| > q$, con q definido por la identidad

$$P[|Z| \leq q] = 1 - \alpha,$$

y $Z \sim N(0,1)$ (por ejemplo, $q = 3.29$ si $\alpha = 0.001$).

Una alternativa es el **test de Pope**, análogo al descrito anteriormente, pero usando $\widehat{\sigma}^2$ para estimar $\mathrm{D}(\widehat{\varepsilon}_i)$: en este caso, la distribución de W_i no es normal y se conoce como distribución τ con $m-n$ grados de libertad.

A su vez, una alternativa al test de Pope es, en el cálculo de W_i, estimar σ^2 habiendo eliminado la observación i-ésima: sea $\widehat{\sigma}^2_{[i]}$ esta estimación de σ^2. Definimos entonces el estadístico

$$W_i^* = \frac{\widehat{\varepsilon}_i}{\widehat{\sigma}_{[i]} q_i^{1/2}}.$$

Esta tipificación del residual ajustado correspondiente a la observación i-ésima tiene interesantes propiedades que analizamos a continuación (ver, por ejemplo, [11]).

1. En primer lugar, esta tipificación viene apoyada por la siguiente identidad

$$W_i = \frac{l_i - \widehat{L}_{i,[i]}}{\mathrm{D}(l_i - \widehat{L}_{i,[i]})}, \tag{7}$$

donde $\widehat{L}_{i,[i]}$ es el estimador mínimos cuadrados de $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ eliminada la observación i-ésima. Algunos autores llaman a $\widehat{\varepsilon}_i^* := l_i - \widehat{L}_{i,[i]}$ *predicted residual* (ver [1]). La demostración de (7) está basada en el siguiente resultado (ver [9, Capítulo 13]).

Teorema 3.1 Si

$$l = Ax + \varepsilon\,, \quad \mathrm{E}\,(\varepsilon) = 0\,, \quad \mathrm{Cov}\,(\varepsilon) = \sigma^2 P^{-1}\,, \tag{8}$$

el estimador mínimos cuadrados de x eliminando la observación i-ésima es

$$\widehat{x}_{[i]} = \widehat{x} - q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i \left(N^{-1}a_{(i)}\right).$$

Además,

$$\widehat{\sigma}_{[i]}^2 = \frac{1}{(m-1)-n}\left[(m-n)\widehat{\sigma}^2 - q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i^2\right]. \;\square$$

Según este teorema y el teorema de Gauss-Markov,

$$\begin{aligned}\widehat{L}_{i,[i]} &= a'_{(i)}\widehat{x}_{[i]} = a'_{(i)}\widehat{x} - q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i\left(a'_{(i)}N^{-1}a_{(i)}\right)\\ &= \widehat{L}_i - q_i^{-1}\left(p_i^{-1} - q_i\right)\widehat{\varepsilon}_i = l_i - p_i^{-1}q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\widehat{\varepsilon}_i^* = p_i^{-1}q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i.$$

Además,

$$\mathrm{Var}\,(\widehat{\varepsilon}_i^*) = p_i^{-2}q_i^{-2}\mathrm{Var}\,(\widehat{\varepsilon}_i) = \sigma^2 p_i^{-2}q_i^{-1}.$$

En resumen,

$$\frac{l_i - \widehat{L}_{i,[i]}}{\mathrm{D}(l_i - \widehat{L}_{i,[i]})} = \frac{p_i^{-1}q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i}{\sigma p_i^{-1}q_i^{-1/2}} = \frac{\widehat{\varepsilon}_i}{\mathrm{D}(\widehat{\varepsilon}_i)} = W_i,$$

quedando demostrada la identidad (7).
2. Consideremos ahora el modelo

$$l = Ax + \delta e_i + \varepsilon\,, \quad \mathrm{E}\,(\varepsilon) = 0\,, \quad \mathrm{Cov}\,(\varepsilon) = \sigma^2 P^{-1}\,. \tag{9}$$

Este modelo (conocido en inglés como *mean-shift outlier model*) difiere del usual en que $\mathrm{E}\,(l_i)$ no coincide con el valor verdadero de la magnitud i-ésima observada, sino que difiere de él en un error sistemático constante igual a δ.

Según este modelo los estimadores mínimos cuadrados de x y δ son

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'PA & A'Pe_i \\ e_i'PA & e_i'Pe_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A'Pl \\ e_i'Pl \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con el siguiente resultado,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}Z^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Z^{-1} \\ -Z^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Z^{-1} \end{pmatrix},$$

donde $Z = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, tenemos

$$\widehat{\delta} = -Z^{-1}e_i'PA\underbrace{N^{-1}A'Pl}_{\widehat{x}_0} + Z^{-1}e_i'Pl = Z^{-1}e_i'P\widehat{\varepsilon} \tag{10}$$

con

$$Z = e_i'Pe_i - e_i'PAN^{-1}A'Pe_i \in \mathbb{R}$$

y $\widehat{\varepsilon} = l - A\widehat{x}_0$, siendo $\widehat{x}_0$ el estimador mínimos cuadrados de x según el modelo usual (8) en el que $\delta = 0$. Además, $\mathrm{Var}(\widehat{\delta}) = \sigma^2 Z^{-1}$.

Si la matriz de pesos es diagonal, $Z = p_i^2 q_i$, y

$$\widehat{\delta} = p_i^{-1}q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i = l_i - \widehat{L}_{i,[i]}. \tag{11}$$

Por otro lado, el estimador de σ^2 según el modelo (9) coincide con $\sigma^2_{[i]}$ (esto se deduce de un resultado que veremos en la siguiente sección). Por consiguiente,

$$\frac{\widehat{\delta}}{\widehat{\sigma}Z^{-1/2}} = \frac{p_i^{-1}q_i^{-1}\widehat{\varepsilon}_i}{\sigma_{[i]}p_i^{-1}q_i^{-1/2}} = W_i^*. \tag{12}$$

3. Si en el modelo (8), $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 P^{-1})$, entonces

$$W_i^* = \frac{\widehat{\varepsilon}_i}{\widehat{\sigma}_{[i]}q_i^{1/2}} \sim t_{m-n-1}.$$

En efecto, si ε tiene una distribución normal en (9), entonces $\widehat{\delta} \sim N(\delta, \sigma^2 B)$. Por otro lado, si $X \sim N(\theta, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ y ambas variables son independientes, entonces $X/\sqrt{Y/n} \sim t(n, \theta)$ denominada distribución t de Student no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad θ (que coincide con una t de Student con n grados de libertad si $\theta = 0$). Por tanto,

$$\frac{\widehat{\delta}}{\widehat{\sigma}\sqrt{B}} \sim t(m - n - 1, \delta).$$

En resumen, si $\delta = 0$, teniendo en cuenta (12) concluimos que $W_i^* \sim t_{m-n-1}$.

4. El estadístico W_i^* refleja desviaciones grandes con más claridad que lo hace el estadístico de Pope, pues cuando el cuadrado de éste tiende a $m-n$, $W_i^* \to \infty$. En efecto,

$$W_i^* = W_i \sqrt{\frac{m-n-1}{m-n-W_i^2}}.$$

5. $\widehat{\sigma}_{[i]}^2$ es robusto frente a problemas de errores groseros en la observación i-ésima.

Trabajando con W_i^*, localizada la observación l_j tal que $|W_j^*| = \max_i |W_i^*|$, decidimos que, efectivamente, hay un error grosero en la observación l_j si $|W_j^*| > q$, con $q \in \mathbb{R}^+$ definido por,

$$P[|t(m-n-1)| \leq q] = 1 - \alpha.$$

Nota 3.1 El aspecto más importante del test anterior (que nos permitirá generalizarlo a modelos multivariantes) es su *equivalencia* con el test para contrastar la hipótesis nula $\delta = 0$ en el modelo (9) con $i = j$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n, \delta)'$, esta hipótesis es del tipo $\lambda' x = 0$ con $\lambda = e_{n+1}$, cuyo F-test correspondiente es, teniendo en cuenta (12) y los resultados de la sección anterior, el siguiente: *rechazar la hipótesis nula si, y sólo si,* $F = (W_j^*)^2 > q$, con

$$P[F(1,m-n-1) \leq q] = 1 - \alpha. \square$$

Sobre detección de errores groseros en modelos lineales univariantes es muy recomendable el artículo de Ellenberg [3].

4 Análisis de residuales en redes GPS

Volvemos en esta sección al modelo de ajuste de una red GPS

$$l = A^* x + \varepsilon\,, \quad \mathrm{E}\,(\varepsilon) = 0\,, \quad \mathrm{Cov}\,(\varepsilon) = \mathrm{Blq\,diag}\,(\Sigma_{ii})\ , \tag{13}$$

con $A^* = [A \otimes I_3]$, donde estamos suponiendo que $\Sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (bases distintas).

Sea $\delta \in \mathbb{R}^3$ y consideremos el modelo lineal

$$l = A^* x + [e_i \otimes I_3]\delta + \varepsilon, \tag{14}$$

con ε igual que en (13) y $e_i \in \mathbb{R}^m$. Este es el *mean shift outlier model* para la base i-ésima. Nótese que $[e_i \otimes I_3] \in \mathbb{R}^{3m \times 3}$ y que

$$([e_i \otimes I_3]\delta)' = (0, .., 0, \underbrace{\delta_1, \delta_2, \delta_3}_{\text{base } i}, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 3m}.$$

Vista la relación en modelos univariantes entre el test de Pope modificado (usando los residuales W_i^*) y el *mean shift outlier model*, queremos formular un test para contrastar la hipótesis $\delta = 0$ en (14). Veamos en primer lugar que esta hipótesis es contrastable según la definición dada en la Sección 2. Con

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix},$$

la matriz de configuración del modelo (14) es $B = \begin{pmatrix} A^* & [e_i \otimes I_3] \end{pmatrix}_{3m \times (3n+3)}$. Además $\delta = \Lambda y$ con $\Lambda = [e'_{n+1} \otimes I_3]$. El rango de Λ es 3. Las columnas de la matriz

$$F_{(3n+3)\times 3} = \left[\begin{pmatrix} 1_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I_3\right] = \begin{pmatrix} [1_n \otimes I_3] \\ 0_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

son una base del espacio nulo de la matriz B. En efecto,

$$\begin{pmatrix} [A \otimes I_3] & [e_i \otimes I_3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1_n \otimes I_3] \\ 0_{3\times 3} \end{pmatrix} = [A \otimes I_3][1_n \otimes I_3].$$

Teniendo ahora en cuenta la identidad (ver [1, Appendix])

$$[A \otimes B][C \otimes D] = [AC \otimes BD],$$

concluimos que

$$[A \otimes I_3][1_n \otimes I_3] = [A1_n \otimes I_3] = 0$$

pues $A1_n = 0$. Además el rango de F es 3. Resta comprobar que $\Lambda F = 0$, pues en tal caso las filas de Λ pertenecen al complemento ortogonal del espacio nulo de B (que coincide con el espacio imagen de B') que es condición necesaria y suficiente para que una función paramétrica sea estimable. Escribimos $F = [(1_{n+1} - e_{n+1}) \otimes I_3]$, entonces

$$\begin{aligned} \Lambda F &= [e'_{n+1} \otimes I_3][(1_{n+1} - e_{n+1}) \otimes I_3] \\ &= [e'_{n+1}(1_{n+1} - e_{n+1}) \otimes I_3] = 0. \end{aligned}$$

Para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \delta = 0$, hay en primer lugar que estudiar la forma cuadrática aleatoria

$$(\Lambda\widehat{y})' \left(\Lambda N^- \Lambda'\right)^{-1} (\Lambda\widehat{y})$$

con $\Lambda = [e'_{n+1} \otimes I_3]$ siendo $\widehat{y}$ cualquier solución del sistema de ecuaciones normales, por ejemplo, $\widehat{y} = N^- B' P l$. La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales N es

$$N = B'PB = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} N_{11} &= A^{*'} P A^* \in \mathbb{R}^{3n \times 3n} \\ N_{12} &= A^{*'} P [e_i \otimes I_3] \\ N_{21} &= N'_{12} \\ N_{22} &= [e_i \otimes I_3]' P [e_i \otimes I_3] \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \end{aligned}$$

Una inversa generalizada de N es

$$N^- = \begin{pmatrix} N_{11}^- + N_{11}^- N_{12} Z^- N_{21} N_{11}^- & -N_{11}^- N_{12} Z^- \\ -Z^- N_{21} N_{11}^- & Z^- \end{pmatrix} \tag{15}$$

con $Z = N_{22} - N_{21} N_{11}^- N_{12} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (ver [10, §3.3]). En la sección anterior hemos visto que $\Lambda N^- \Lambda' = Z^-$ es definida positiva. Por tanto, la matriz Z tiene inversa y podemos reemplazar Z^- por Z^{-1} en (15).

Teniendo en cuenta que

$$B'Pl = \begin{pmatrix} A^{*\prime} Pl \\ [e_i \otimes I_3]' Pl \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\delta} &= -Z^{-1} N_{21} N_{11}^- A^{*\prime} Pl + Z^{-1} [e_i \otimes I_3]' Pl \\ &= Z^{-1} [e_i \otimes I_3]' P \left(l - A^* N_{11}^- A^{*\prime} Pl \right) \\ &= Z^{-1} [e_i \otimes I_3]' P \widehat{\varepsilon} \end{aligned} \tag{16}$$

con $\widehat{\varepsilon} = l - A^* \widehat{x}_0$ y $\widehat{x}_0 = N_{11}^- A^{*\prime} Pl$. Nótese que $\widehat{x}_0$ es una estimación mínimos cuadrados de x según el modelo (13) ($\delta = 0$).

Si $P = \operatorname{Blq\,diag}(P_{ii})$ ($\Sigma_{ii} = \sigma^2 P_{ii}^{-1}$ en (13)), entonces $N_{22} = P_{ii} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y

$$[e_i \otimes I_3]' P \widehat{\varepsilon} = P_{ii} \widehat{\varepsilon}_{(i)}.$$

Por tanto

$$\boxed{\widehat{\delta} = Z^{-1} P_{ii} \widehat{\varepsilon}_{(i)}.} \tag{17}$$

Esta fórmula generaliza la (11). En resumen,

$$(\Lambda \widehat{y})' \left(\Lambda N^- \Lambda' \right)^{-1} (\Lambda \widehat{y}) = \widehat{\varepsilon}_{(i)}{}' P_{ii} Z^{-1} P_{ii} \widehat{\varepsilon}_{(i)}.$$

Calculamos ahora $S = (l - B\widehat{y})' P (l - B\widehat{y})$. Según resultados anteriores

$$l - B\widehat{y} = \widehat{\varepsilon} + A^* N_{11}^- N_{12} \widehat{\delta} - [e_i \otimes I_3] \widehat{\delta}.$$

Puesto que $\widehat{\varepsilon}$ pertenece al complemento ortogonal del espacio imagen de A^*, entonces

$$\widehat{\varepsilon}' P \left(A^* N_{11}^- N_{12} \widehat{\delta} \right) = 0.$$

Eligiendo N_{11}^- de modo que sea reflexiva ($N_{11}^- N_{11} N_{11}^- = N_{11}^-$), resulta

$$S = \widehat{\varepsilon}' P \widehat{\varepsilon} - 2 \widehat{\varepsilon}' P [e_i \otimes I_3] \widehat{\delta} + \widehat{\delta}' Z \widehat{\delta}.$$

Sustituyendo ahora la expresión de $\widehat{\delta}$ dada por (16), obtenemos finalmente

$$S = S_0 - \widehat{\varepsilon}' P [e_i \otimes I_3] Z^{-1} [e_i \otimes I_3]' P \widehat{\varepsilon}, \tag{18}$$

con $S_0 = \widehat{\varepsilon}'P\widehat{\varepsilon}$. Si $P = \mathrm{Blq\,diag}\,(P_{ii})$, tenemos

$$\boxed{S = S_0 - \widehat{\varepsilon}_{(i)}{}'P_{ii}Z^{-1}P_{ii}\widehat{\varepsilon}_{(i)}.} \tag{19}$$

Por tanto, el estimador de σ^2 según el modelo (14) es

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{3m-3n}\left[(3m-(3n-3))\widehat{\sigma}_0^2 - \widehat{\varepsilon}_{(i)}{}'P_{ii}Z^{-1}P_{ii}\widehat{\varepsilon}_{(i)}\right]. \tag{20}$$

El F-test para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \delta = 0$ es entonces el siguiente. Definimos

$$F_{(i)} = \frac{\widehat{\delta}'\left(\Lambda N^- \Lambda'\right)^{-1}\widehat{\delta}/3}{\widehat{\sigma}^2} = \frac{\widehat{\varepsilon}_{(i)}{}'P_{ii}Z^{-1}P_{ii}\widehat{\varepsilon}_{(i)}}{3\widehat{\sigma}^2}.$$

Rechazamos la hipótesis nula si, y sólo si, $F_{(i)} > q$, con $q \in \mathbb{R}^+$ definido por

$$P[F(3{,}3m-3n) \leq q] = 1 - \alpha.$$

En analogía con modelos univariantes, podemos finalmente resumir el proceso para detectar errores groseros (bases groseras) en redes vectoriales GPS:

1. Localizar la base $l_{(j)}$ de modo que

$$F_{(j)} = \max_i F_{(i)}$$

2. La base $l_{(j)}$ es grosera si $F_{(j)} > q$, con $q \in \mathbb{R}^+$ definido por

$$P[F(3{,}3m-3n) \leq q] = 1 - \alpha.$$

Para un estudio más general acerca de la detección de errores groseros y el análisis de residuales en modelos multivariantes, remitimos al lector a los artículos [14] y [2].

Referencias

[1] R. Christensen. *Plane answers to complex questions: the theory of linear models.* Springer, New York, second edition, 1996.

[2] J. Hasslett and K. Hayes. Residuals for the linear model with general covariance structure. *J. R. Statist. Soc. B*, 60:201–215, 1998.

[3] J. H.Ellenberg. Testing for a single outlier from a general linear regression. *Biometrics*, 32:637–645, 1976.

[4] R. R. Hocking. *The analysis of linear models.* Wadsworth, California, 1985.

[5] F. Kai-Tai and Z. Yao-Ting. *Generalized multivariate analysis.* Springer/Science Press, Berlin/Beijing, 1990.

[6] A. M. Kshirsagar. *A course in linear models.* Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[7] L. Leick. GPS *satellite surveying.* John Wiley, New York, 1995.

[8] J. Otero. Sobre algunos modelos geodésicos lineales con deficiencia de rango igual a 1. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (ESP)*, 94(1):33–36, 2000.

[9] D. Peña. *Estadística: modelos y métodos. 2. Modelos lineales y series temporales.* Alianza Editorial, Madrid, 1989.

[10] R. M. Pringle and A. A. Rayner. *Generalized inverse matrices with applications to statistics.* Griffin, London, 1971.

[11] S.Chatterjee and A. S. Hadi. Influential observations, high leverage points, and outliers in linear regression. *Statistical Science*, 1(3):379–416, 1986.

[12] S. R. Searle. *Linear Models.* John Wiley, New York, 1971.

[13] M. J. Sevilla. Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas. III curso de geodesia superior. *Publicaciones del Instituto de Astronomía y Geodesia*, Publicación núm. 148, 1986.

[14] M. S. Srivastava and D. von Rosen. Outliers in multivariate regression models. *Journal of Multivariate Analysis*, 65:195–208, 1998.

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE — MADRID

(Antes Seminario de Astronomía y Geodesia)

1.—Efemérides de 63 Asteroides para la oposición de 1950 (1949).
2.—E. Pajares: Sobre el cálculo gráfico de valores medios (1949).
3.—J. Pensado: Orbita del sistema visual σ^2 U Maj (1950).
4.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1951 (1950).
5.—J. M. Torroja: Corrección de la órbita del Asteroide 1395 "Aribeda" (1950).
6.—R. Carrasco y J. M. Torroja: Rectificación de la órbita del Asteroide 1371 "Resi" (1971).
7.—J. M. Torroja y R. Carrasco: Rectificación de la órbita del Asteroide 1560 (1942 XB) y efemérides para la oposición de 1951 (1951).
8.—M. L. Siegrist: Orbita provisional del sistema visual Σ 728-32 Orionis (1951).
9.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1952 (1951).
10.—J. Pensado: Orbita provisional de Σ 1883 (1951).
11.—M. L. Siegrist: Orbita provisional del sistema visual Σ 2052 (1952).
12.—Efemérides de 88 Asteroides para la oposición de 1953 (1952).
13.—J. Pensado: Orbita de ADS 9380 = Σ 1879 (1952).
14.—F. Alcázar: Aplicaciones del Radar a la Geodesia (1952).
15.—J. Pensado: Orbita de ADS 11897 = Σ 2438 (1952).
16.—B. Rodríguez-Salinas: Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las marcas y predicción de las mismas en un cierto lugar (1952).
17.—R. Carrasco y M. Pascual: Rectificación de la órbita del Asteroide 1528 "Conrada" (1953).
18.—J. M. González-Aboin: Orbita de ADS 1709 = Σ 228 (1953).
19.—J. Baltá: Recientes progresos en Radioastronomía. Radiación solar hiperfrecuente (1953).
20.—J. M. Torroja y A. Vélez: Corrección de la órbita del Asteroide 1452 (1938 DZ_1) (1953).
21.—J. M. Torroja: Cálculo con Cracovianos (1953).
22.—S. Arend: Los polinomios ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales (1953).
23.—J. M. Torroja y V. Bongera: Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de Sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo (Guinea Española) (1954).
24.—J. Pensado: Orbita de la estrella doble Σ 2 (1954).
25.—J. M. Torroja: Nueva órbita del Asteroide 1420 "Radcliffe" (1954).
26.—J. M. Torroja: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
27.—R. Carrasco y M. L. Siegrist: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 "Albertine" (1954).
28.—J. Pensado: Distribución de los períodos y excentricidades y relación período-excentricidad en las binarias visuales (1955).
29.—J. M. González-Aboin: Nueva órbita del Asteroide 1372 "Haremari" (1955).
30.—M. de Pascual: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).
31.—J. M. Torroja: Orbita del Asteroide 1554 "Yugoslavia" (1955).
32.—J. Pensado: Nueva órbita del Asteroide 1401 "Lavonne" (1956).
33.—J. M. Torroja: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
34.—D. Calvo: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 "Mündleira" (1956).
35.—M. L. Siegrist: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 "Predappia" (1956).

36.—J. Pensado: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).

37.—J. M. Torroja y V. Bongera: Resultados de la observación del eclipse total de Sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).

38.—St. Wierzbinski: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens (1958).

39.—J. M. González-Aboin: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 "Prisma" (1958).

40.—M. López Arroyo: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).

41.—F. Múgica: Sobre la ecuación de Laplace (1958).

42.—F. Martín Asín: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).

43.—St. Wierzbinski: Orbite améliorée de h 4530 = γ Cen = Cpd —48°. 4965 (1958).

44.—D. Calvo Barrena: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 "Kobolda" (1958).

45.—M. López Arroyo: El ciclo largo de la actividad solar (1959).

46.—F. Múgica: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).

47.—J. M. Torroja: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).

48.—J. M. Torroja, P. Jiménez-Landi y M. Solís: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de Sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).

49.—E. Pajares: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).

50.—J. M. González-Aboin: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).

51.—J. M. Torroja: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).

52.—F. Múgica: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).

53.—M. López Arroyo: La evolución del área de las manchas solares (1962).

54.—F. Múgica: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).

55.—P. Díez-Picazo: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).

56.—J. M. Torroja: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).

57.—F. Martín Asín: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).

58.—F. Sánchez Martínez: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).

59.—J. M. González-Aboín: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).

60.—F. Sánchez Martínez y R. Dumont: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).

61.—M. Rego: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región $\lambda\lambda$ 4000-6600 A (1969).

62.—C. Machín: Mareas terrestres (1969).

63.—J. M. Torroja: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).

64.—M. J. Sevilla: Reducción automática de posiciones de estrellas (1970).

65.—J. M. Torroja: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid en 1969 (1970).

66.—M. J. Sevilla: Los cálculos de estación en triangulación espacial (1970).

67.—Manuel E. Rego: Determinación de las abundancias de los elementos en la atmósfera de la estrella de alta velocidad 31 Aql. (1970).

68.—M. J. Fernández-Figueroa: Análisis cualitativo del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1971).

69.—J. M. Torroja: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1970 (1971).

70.—R. Vieira y R. Ortiz: Descripción de un aparato para medida de coordenadas (1971).

71.—J. M. Torroja: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1971 (1972).

72.—M. J. Fernández-Figueroa: Observación y estudio teórico del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1972).

73.—M. J. Sevilla: Cálculo de las constantes de distorsión y parámetros del disco obturador para cámaras balísticas (1973).

74.—R. Parra y M. J. Sevilla: Cálculo de efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos (1973).

75.—M. Rego y M. J. Fernández-Figueroa: Resultado de las observaciones de α Peg efectuadas desde el satélite europeo TDI (1973).

76.—E. Simonneau: Problemas en la determinación de abundancias de elementos en las estrellas en condiciones de equilibrio termodinámico local y alejadas del equilibrio termodinámico local (1974).

77.—J. Aranda: Construcción de modelos de estructura interna para estrellas en la secuencia principal inicial (1974).

78.—R. Ortiz, M. J. Sevilla y R. Vieira: Estudio de la calibración, técnica de medida y automatización de datos en un comparador para medidas de placas estelares (1974).

79.—M. J. Sevilla: Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos y análisis de los errores en la restitución de un arco de órbita (1974).

80.—M. A. Acosta, R. Ortiz y R. Vieira: Diseño y construcción de un fotómetro fotoeléctrico para la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna (1974).

81.—T. J. Vives, C. Morales, J. García-Pelayo y J. Barbero: Fotometría fotográfica UBV del cúmulo galáctico King 19 (1974).

82.—R. Ortiz y R. Vieira: Control automático en posición y tiempo de los sistemas de obturación de las cámaras de observación de satélites geodésicos (1974).

83.—J. M. Torroja: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1972 y 1973 (1974).

84.—M. J. Fernández-Figueroa y M. Rego: α CrB en el ultravioleta lejano (1975).

85.—J. M. Torroja, R. Vieira, R. Ortiz y M. J. Sevilla: Estudio de mareas terrestres en España (1975).

86.—M. J. Sevilla y R. Parra: Levantamiento gravimétrico de Lanzarote (1975).

87.—P. Kundanmal Sukhwani: Modelos teóricos de curvas de luz. Su aplicación al sistema β Lyrae (1975).

88.—M. J. Sevilla: Coordenadas astronómicas y geodésicas. Desviación relativa de la vertical (1975).

89.—C. Tejedor: Fotometría fotoeléctrica R. G. U. del cúmulo galáctico IC 2581 (1976).

90.—M. J. Sevilla: Nuevos coeficientes para la reducción automática de posiciones de estrellas (1976).

91.—M. Rego: Técnicas observacionales en espectroscopía astrofísica (1976).

92.—M. J. Sevilla: Determinación de la latitud por distancias cenitales de la polar, método de Littrow (1976).

93.—T. J. Vives: Determinación fotométrica del tipo espectral de la componente desconocida de una estrella binaria eclipsante (1976).

94.—M. Rego y M. J. Fernández-Figueroa: Contraste y determinación por métodos astrofísicos de fuerzas de oscilador (1977).

95.—M. J. Sevilla y R. Chueca: Determinación de acimutes por observación de la Polar. Método micrométrico (1977).

96.—José M. García-Pelayo: Fotometría R G U en un campo del anticentro galáctico, cerca del NGC 581 (1977).

97.—José M. García-Pelayo: Datos fotométricos de 2.445 estrellas estudiadas en la región de Casiopea, entre los cúmulos abiertos Trumpler 1 y NGC 581 (1977).

98.—Prem K. Sukhwani y Ricardo Vieira: Spectral Analysis of Earth Tides (1977).

99.—José M. Torroja y Ricardo Vieira: Earth Tides in Spain. Preliminary results (1977).

100.—Prem K. Sukhwani y Ricardo Vieira: Three different methods for taking in account the gaps in spectral analysis of Earth Tides records (1978).

101.—R. VIEIRA: Mareas terrestres (1978).

102.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la longitud por el método de Mayer. Programas de cálculo automático (1979).

103.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la latitud por el método de Sterneck. Programas de cálculo automático (1979).

104.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de cálculo automático (1979).

105.—P. K. SUKHWANI y A. GIMÉNEZ: Corrección de efectos atmosféricos para imágenes tomadas desde satélites Landsat (1979).

106.—M. J. SEVILLA: Inversión de Matrices Simétricas en el método de mínimos cuadrados (1979).

107.—A. GIMÉNEZ: Análisis de la curva de luz del sistema binario eclipsante S Velorum (1979).

108.—M. J. SEVILLA: Determinación del acimut de una referencia por observación de la estrella polar. Programa de cálculo automático (1979).

109.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Primera parte) (1980).

110.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Determinación de la latitud por el método de Horrebow-Talcott. Programas de Cálculo Automático (1980).

111.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1980).

112.—R. VIEIRA y M. OREJANA: Comunicaciones presentadas en las XLI y XLII Jornadas del Grupo de Trabajo de Geodinámica del Consejo de Europa. Luxemburgo (1979-80).

113.—M. J. SEVILLA: Sobre un método de cálculo para la resolución de los problemas geodésicos directo e inverso (1981).

114.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. TORO, F. LAMBAS, M. OREJANA y P. K. SUKHWANI: Comunicaciones presentadas en el IX Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Nueva York (1981).

115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V. L. B. I. al estudio del movimiento del Polo (1981).

116.—A. GONZÁLEZ-CAMACHO y M. J. SEVILLA: Algunas relaciones entre diferentes ejes que se consideran en la rotación de la Tierra (1981).

117.—R. VIEIRA, F. LAMBAS y E. GIMÉNEZ: Modificaciones realizadas en un gravímetro LaCoste Romberg mod. G para su utilización en registro continuo de la gravedad (1981).

118.—R. VIEIRA: La microrred de mareas gravimétricas del Sistema Central (1981).

119.—J. M. TORROJA y R. VIEIRA: Informe sobre el desarrollo del programa de investigación sobre mareas terrestres en el último bienio (1981).

120.—F. LAMBAS y R. VIEIRA: Descripción, estudio de la precisión y aplicaciones geodésicas y geofísicas de los nuevos niveles de lectura electrónica (1981).

121.—M. J. SEVILLA: Programación del método de la cuerda (1981).

122.—J. M. TORROJA: Historia de la Ciencia Arabe. Los Sistemas Astronómicos (1981).

123.—M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Comunicaciones presentadas en la Sesión Científica de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el día 13 de enero de 1982 (1982).

124.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Aplicación del método de colocación a la reducción de placas fotográficas de estrellas (1982).

125.—M. J. SEVILLA y A. G. CAMACHO: Deformación rotacional de una tierra elástica (1982).

126.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Obtención de las medidas de la precisión en la determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1982).

127.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en la IV Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica. Santiago de Compostela (1983).

128.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Segunda parte) (1983).

129.—M. J. SEVILLA: Geodesia por satélites y navegación (1983).

130.—L. GARCÍA ASENSIO, A. G. CAMACHO, P. ROMERO y M. J. SEVILLA: Comunicaciones presentadas en la V Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica (1983).

131.—M. J. SEVILLA: Anomalías de la gravedad basadas en el sistema geodésico de referencia 1980 (1983).

132.—J. M. TORROJA: Historia de la Física hasta el siglo XIX. La Mecánica Celeste (1983).

133.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: The Molodensky Problem for an homogeneous liquid core (1984).

134.—J. M. TORROJA: La obra astronómica de Alfonso X El Sabio (1984).

135.—H. MORITZ: Sistemas de referencia en Geodesia (1984).

136.—H. MORITZ: Rotación de la Tierra (1984).

137.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: Autofrecuencias del movimiento del Polo para un modelo de Tierra de tipo Jeffreys Molodensky (1984).

138.—J. M. TORROJA: Nuevas definiciones en el problema de la medida del tiempo (1984).

139.—M. J. SEVILLA: Astronomía Geodésica (1984).

140.—M. J. SEVILLA y M. D. MARTÍN: Diseño de una Microrred en la Caldera del Teide para el estudio de deformaciones de la corteza en la zona (1986).

141.—R. VIEIRA, C. DE TORO y V. ARAÑA: Estudio Microgravimétrico en la Caldera del Teide (1986).

142.—M. J. SEVILLA, M. D. MARTÍN y A. G. CAMACHO: Análisis de Datos y Compensación de la primera campaña de observaciones en la Caldera del Teide (1986).

143.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Hamiltonian Formulation of the polar motion for an elastic earth's model (1986).

144.—P. ROMERO y M. J. SEVILLA: The Sasao-Okubo-Saito equations by Hamilton Theory. First Results (1986).

145.—R. VIEIRA, M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y M. D. MARTÍN: Geodesia de precisión aplicada al control de movimientos y deformaciones en la Caldera del Teide (1986).

146.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. DE TORO, B. DUCARME, J. KAARIAINEN, E. MEGÍAS y J. FERNÁNDEZ: Comunicaciones presentadas en el X Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Madrid, 1985 (1986).

147.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en el X Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Madrid, 1985 (1986).

148.—M. J. SEVILLA: Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes Geodésicas: III Curso de Geodesia Superior (1986).

149.—H. LINKWITZ: Compensación de grandes redes geodésicas: III Curso de Geodesia Superior (1986).

150.—H. HENNEBERG: Redes geodésicas de alta precisión: III Curso de Geodesia Superior (1986).

151.—M. J. SEVILLA: Cartografía Matemática (1986).

152.—P. ROMERO y M. J. SEVILLA: Tratamiento Canónico del problema de Poincare. Movimiento del Polo. (1986)

153.—A. G. CAMACHO y M. D. MARTÍN: Constreñimientos internos en la compensación de Estaciones. (1986)

154.—J. OTERO: An Approach to the Scalar Boundary Value Problem of Physical Geodesy by Means of Nash-Hörmander Theorem. (1987)

155.—M. J. SEVILLA: Introducción al Problema Clásico de Molodensky. (1987)

156.—F. SANSÓ: Problemas de Contorno de la Geodesía Física. (1987)

157.—M. J. SEVILLA: Colocación mínimos cuadrados. (1987)

158.—L. MUSSIO: Estrategias del Método de colocación. Ejemplos de aplicación. (1987)

159.—M. J. SEVILLA, P. MUÑOZ, J. VELASCO y P. ROMERO: Calibración de un Distanciómetro de infrarrojos en una Base Interferométrica (1987).

160.—A. RIUS, J. RODRÍGUEZ, M. J. SEVILLA, R. VIEIRA, J. FERNÁNDEZ, C. DE TORO, A. G. CAMACHO y V. ARAÑA: Comunicaciones presentadas en la Sesión Científica de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el día 4 de mayo de 1988 (1988).

161.—R. VIEIRA, A. G. CAMACHO y C. DE TORO: Cálculo de la Corrección de Marea en la Península Ibérica (1988).

(continúa en la cuarta de cubierta)

162.—A. G. Camacho, R. Vieira, C. de Toro y J. Fernández: Estudio Gravimétrico de la Caldera del Teide (1988).

163.—A. J. Gil, M. J. Sevilla, G. Rodríguez y J. Otero: Aplicaciones de la colocación y Estudios del Geoide (1988).

164.—R. Vieira, J. Fernández, C. de Toro, A. G. Camacho y M. V. Ruymbeke: Investigaciones Geodinámicas en la Isla de Lanzarote (1988).

165.—M. J. Sevilla, P. Romero, A. Núñez y B. Bada: Compensaciones y resultados (1988).

166.—R. Vieira, C. de Toro y A. G. Camacho: Investigaciones en mareas (1988).

167.—A. Núñez, M. J. Sevilla y J. M. Agria: Determinación Astrogeodésica del Geoide en Portugal (1988).

168.—M. J. Sevilla y P. Romero: Pre-Processing Geodetic Data of the Volcanic area of Teide to monitoring deformations (1988).

169.—M. J. Sevilla y A. J. Gil: Fórmulas diferenciales para los problemas Geodésicos directo e inverso en el método de la cuerda (1988).

170.—Zd. Simón, V. Stanchev, C. de Toro, A. P. Venedikov y R. Vieira: Relation between earth tide observations and some other data (1988).

171.—J. Otero: On the Global Solvability of the fixed gravimetric boundary value problem (1989).

172.—R. Vieira, J. Fernández, C. de Toro y A. G. Camacho: Comunicaciones presentadas en el XI International Symposium on earth tides. Helsinki (1989).

173.—A. Rius y C. Jacobs: Precise V.L.B.I. surveying at the Madrid DSCC (1989).

174. J. Otero y M. J. Sevilla: Modelo matemático para el ajuste simultáneo mínimos cuadrados de un bloque fotogramétrico (1989).

175.—F. Sacerdote: I Problemi sopradeterminati in Geodesia Fisica e Il Problema dell'Altimetria-Gravimetria (1989).

176.—M. J. Sevilla: Soluciones progresivas en el método de Mínimos Cuadrados (1989).

177.—M. J. Sevilla y P. Romero: Compensación de Redes de Nivelación Trigonométrica (1989).

178.—J. Otero y M. J. Sevilla: On the optimal choice of the standard parallels for a conformal conical projection (1990).

179.—R. Vieira, J. Fernández, M. Van Ruymbeke, A. G. Camacho, J. Arnoso y C. Toro: Geodynamic Research in Lanzarote (Canary Islands) (1990).

180.—M. J. Sevilla, A. Gil y P. Romero: Adjustment of the first order gravity net in the Iberian Peninsula (1990).

181.—R. Vieira, J. Makinen, A. G. Camacho y M. J. Sevilla: Observaciones absolutas de la gravedad en España (1991).

182.—M. J. Sevilla: Criterios de precisión cartográfica (1991).

183.—A. P. Venedikov, R. Vieira y C. de Toro: A new method for earth tide analysis (1992).

184.—M. J. Sevilla: Mare Nostrum. Geomed Report-2 (1992).

185.—E. Sardon, A. Rius y N. Zarrada: GPS Inospheric Delays (1993).

186.—M. J. Sevilla: Teoría de Errores de observación (1993).

187.—C. de Toro, A. P. Venedikov y R. Vieira: A New Method for Earth Tide Data Analysis (1993).

188.—M. J. Sevilla: Análisis de Observaciones Gravimétricas y Calculo de Anomalías (1994)

189.—A. P. Venedikov, R. Vieira, C. de Toro y J. Arnoso: A New Program Developed in Madrid for Tidal Data Processing (1995).

190.—J. L. Valbuena, M.ª Dolores Vara, M.ª Luisa Soriano, Guadalupe Rodriguez y M. J. Sevilla: Instrumentación y Metodología empleadas en las Técnicas Altimétricas Clásicas (1996).

191.—José Fernández, Ting-To Yu, and John B. Rundle: Displacement and Gravity Changes due to Different Sources in Layered Media (1997).

192.—J. Otero: Generalized Inverse Matrices and the Gauss-Markov Theorem (1998).

193.—Miguel J. Sevilla de Lerma: Introducción Histórica a la Geodesia (1999).

194.—C. de Toro y LLaca: Astronomía, Historia y Calendario (1999).

195.—A. I. Gómez de Castro: La Astronomía en el Siglo XX (2000).

196.—M. J. Sevilla de Lerma: Museo de Astronomía y Geodesia (2001).

Depósito Legal: M. Sep. 894-1958
ISSN: 0213 - 6198

Realigraf, S. A. Pedro Tezano, 26. 28039 Madrid